গণিত

দ্বাদশ শ্রেণি

দ্বিপদ প্রক্রিয়া বা দ্বিনিধানী প্রক্রিয়া

1. $R-\{0\}$ সেটের ওপর $a*b=|ab|$ একটি প্রক্রিয়া (operation) * প্রদত্ত হলে, দেখাও যে এটি একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া। আরও দেখাও যে, এটি একটি বিনিময়যোগ্য ও সংযোগ দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

উঃ প্রদত্ত প্রক্রিয়াটি (operation) হলো, $a*b=|ab|$, $R-\{0\}$ সেটের উপর।

ধরা যাক, $a,b\in R-\{0\}$

$\therefore \quad a,b\in R-\{0\}$ [$\because$ R সেটের উপর গুণফল প্রক্রিয়াটি বিনিময়যোগ্য]

$\Rightarrow |ab|\in R-\{0\}$

$\therefore \quad a*b\in R-\{0\}$; সকল $a,b\in R-\{0\}$ এর জন্য।

অর্থাৎ, * এর সাপেক্ষে, $R-\{0\}$ সেট্‌টি বন্ধ (closed)।

সুতরাং, *, $R-\{0\}$ সেটের উপর একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

বিনিময় যোগ্যতা:

ধরা যাক, $a,b\in R-\{0\}$

$\therefore \quad a*b=|ab|$ এবং $b*a=|ba|=|ab|$

$\therefore \quad a*b=b*a$ সকল $a*b\in R-\{0\}$ এর জন্য।

$\therefore$ * হলো $R-\{0\}$ সেটের উপর একটি বিনিময়যোগ্য দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

সংযোজ্যতা:

ধরা যাক, $a,b,c\in R-\{0\}$

$\therefore \quad (a*b)*c=|ab|*c=||ab|.c|=|abc|$

এবং $a*(b*c)=a*|bc|=|a.|bc||=|abc|$

$(a*b)*c=a*(b*c)$ সকল $a,b,c\in R-\{0\}$ এর জন্য।

$\therefore$ * হল $R-\{0\}$ সেটের উপর একটি সংযোজ্য দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

2. Z পূর্ণসংখ্যা সমূহের সেট। এর উপর একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞাত হয় : $a*b=a+b+1$ যেখানে $a,b\in Z$.

(i) '*'-এর একসম (identity) উপাদান নির্ণয় করো। (ii) একটি পদ $a\in Z$-এর বিপরীত (inverse) পদ নির্ণয় করো।

উঃ **একসম (identity) উপাদানের অস্তিত্ব :**

ধরা যাক, Z সেট্ '*' দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে একমাত্র উপাদান হলো e।

সুতরাং, $a*e=e*a=a$ সকল $a\in Z$ এর জন্য।

$\Rightarrow a+e+1=e+a+1=a$ সকল $a\in Z$ এর জন্য। $\Rightarrow e=-1\in Z.$।

$\therefore$ Z সেটে '*' দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে একসম উপাদান হলো -1।

বিপরীত (inverse) পদের অস্তিত্ব:

ধরা যাক, $a \in Z$ এবং এর বিপরীত পদটি হলো b।

$\therefore \quad a * b = e \Rightarrow a + b + 1 = -1 \Rightarrow b = -(2 + a) \qquad [\because e = -1]$

$\because \quad 2 \in Z, a \in Z \qquad \therefore (2 + a) \in Z \Rightarrow -(2 + a) \in Z$

সুতরাং, প্রত্যেক $a \in Z$ এর বিপরীত পদটি হলো $-(2 + a)$।

3. ধরা যাক, $A = \{1, -1, i, -i\}$ একটি সেট্ যেখানে $i = \sqrt{-1}$ । একটি বিভাজন ছক তৈরি করো সাধারণ গুণফল দ্বিপদ প্রক্রিয়ার জন্য এবং এর থেকে গুরুত্বপূর্ণ ধর্মগুলি আলোচনা করো।

উঃ **সমাধান :**

আমরা জানি যে,

$1 \times 1 = 1$	$1 \times (-1) = -1$	$1 \times i = i$	$1 \times (-i) = -i$
$(-1) \times 1 = -1$	$(-1) \times (-1) = 1$	$(-1) \times i = -i$	$(-1) \times (-i) = i$
$i \times 1 = i$	$i \times (-1) = -i$	$i \times i = -1$	$i \times (-i) = 1$
$(-i) \times 1 = -i$	$(-i) \times (-1) = i$	$(-i) \times i = 1$	$(-i) \times (-i) = -1$

$\therefore$ সাধারণ গুণফল দ্বিপদ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে বিভাজন ছক নীচে দেখানো হয়েছে :

x	1	–1	i	–i
1	1	–1	i	–i
–1	–1	1	–i	i
i	i	–i	–1	1
–i	–i	i	1	–1

উপরের বিভাজন ছকটি পর্যবেক্ষণ করে দেখা যায় যে :

(i) $\because$ ছকে লিপিবন্ধ $4^2 = 16$ টি পদ A সেটের পদ,

$\therefore$ সাধারণ গুণফল প্রক্রিয়াটি A সেটের উপর একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া।

(ii) $\because$ বিভাজন ছকটি তার মুখ্য কর্ণ সাপেক্ষে প্রতিসম (symmetric),

$\therefore$ A সেটের উপর গুণফল দ্বিপদ প্রক্রিয়াটি বিনিময়যোগ্য (commutative)।

(iii) বিভাজন ছকের প্রথম সারি একেবারে উপরের সারির সঙ্গে অভিন্ন এবং ছকের প্রথম স্তম্ভ একেবারে বামপার্শ্বের স্তম্ভের সঙ্গে অভিন্ন এবং ছকের এই প্রথম সারি ও প্রথম স্তম্ভ পরস্পর 1 পদে ছেদ করে।

$\therefore$ A সেটের উপর গুণফল দ্বিপদ প্রক্রিয়াটির একসম উপাদান হয় 1।

(iv) যেহেতু বিভাজন ছকের প্রত্যেক সারি ও প্রত্যেক স্তম্ভে একসম উপাদান 1 আছে।

$\therefore$ A সেটের প্রত্যেকটি পদ ইন্‌ভার্টিবল (invertible)। স্পষ্টতই, $1^{-1} = 1, (-1)^{-1} = -1, i^{-1} = -i, (-i)^{-1} = i$